



دوره جمع بندی دوپینگ

سه شنبه

۱۴۰۴/۰۱/۰۵

دفترچه پاسخ

بانک سؤالات کنکور:

جامع مثلثات:

فصل ۲ دهم / فصل ۴ یازدهم / فصل ۲

دوازدهم

دوپینگ ماز

گروه آزمایشی علوم تجربی ریاضی

درس	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	زمان پیشنهادی
ریاضی	۳۹	۱	۳۹	۵۹ دقیقه

مباحث پایه	جامع تابع - توابع نمایی و لگاریتمی	جامع مثلثات	جامع حد و پیوستگی	جامع مشتق و کاربرد مشتق	الگو و دنباله + توان‌های گویا عبارت‌های جبری + جامع هندسه	جامع شمارش، بدون شمردن
هفته اول	هفته دوم	هفته سوم	هفته چهارم	هفته پنجم	هفته ششم	

۵۵ روز جمع‌بندی تا کنکور اردیبهشت

دفترچه مکمل دوپینگ: این دفترچه روز بعد از آزمون دوپینگ هر درس در اختیار شما قرار می‌گیرد و شامل بانک سؤالات کنکورهای سراسری ۹۸ تا ۱۴۰۳ در همان مبحث است تا ضمن مرور مجدد، سیر تست‌های کنکور در هر مبحث را به دقت مورد بررسی قرار دهید.

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هر گونه استفاده غیرقانونی از دفترچه سؤالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.



سوالات کنکور: فصل ۲ دهم

۱- اگر $2\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3}$ باشد، حاصل $\tan^2 x$ کدام است؟ ($x \neq 0$)

$\frac{1}{4}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۰۰۲) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$\begin{cases} \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \\ 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \end{cases}$$

$$2\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3} \Rightarrow 2\sin^2 x + (1 - \sin^2 x) = \frac{4}{3}$$

$$\sin^2 x = \frac{4}{3} - 1 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{3} \xrightarrow{\cos^2 x = 1 - \sin^2 x} \cos^2 x = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \tan^2 x = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

گروه آموزشی ماز

۲- اگر $10(\sin x + \cos x) = 6\sqrt{5}$ باشد، مقدار $\tan x$ کدام عدد می تواند باشد؟

۳ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

-۲ (۲)

$-\frac{1}{3}$ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۲) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$$

$$10(\sin x + \cos x) = 6\sqrt{5} \Rightarrow \sin x + \cos x = \frac{6\sqrt{5}}{10} > 1$$

$$\xrightarrow{\text{توان دو}} 1 + \sin 2x = \frac{9}{5} \Rightarrow \sin 2x = \frac{4}{5} \Rightarrow 2\sin x \cos x = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{2}{5}$$

از طرفی می دانیم

$$\frac{1}{\sin x \cos x} = \tan x + \cot x$$

پس:

$$\tan x + \cot x = \frac{10}{2} = 5 \Rightarrow \begin{cases} \tan x = 2 \\ \tan x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

با توجه به گزینه‌ها، $\tan x = \frac{1}{2}$ قابل قبول است.

گروه آموزشی ماز

۳- اگر $\cot \alpha = -\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$ و $\frac{1}{\sqrt{\cos^2 \alpha}} - \frac{1}{\cot \alpha} = \frac{1 - \sin \alpha}{|\cos \alpha|}$ باشد، انتهای کمان α در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد؟

اول (۴)

دوم (۳)

سوم (۲)

چهارم (۱)

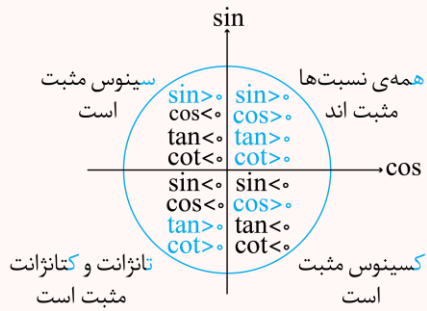


(متوسط - محاسباتی - ۱۰۰۲) (کنکور خارج ۱۴۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

تعیین ناحیه زاویه با کمک نسبت‌های مثلثاتی

علامت نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی به صورت زیر است:



س ← در ناحیه دوم فقط sin مثبت است.
ک ← در ناحیه چهارم فقط cos مثبت است.

اگر چند رابطه مثلثاتی داشته باشیم برای تعیین این که زاویه داده شده (x) در کدام ناحیه دایره مثلثاتی قرار می‌گیرد باید روابط داده شده را تا حد امکان ساده کنیم و علامت حداقل ۲ نسبت مثلثاتی را تعیین کنیم.

$$\frac{1}{\sqrt{\cos^2 \alpha}} - \frac{1}{\cot \alpha} = \frac{1 - \sin \alpha}{|\cos \alpha|} \Rightarrow \frac{1}{|\cos \alpha|} - \frac{1}{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{1 - \sin \alpha}{|\cos \alpha|}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|\cos \alpha|} - \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{|\cos \alpha|} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow |\cos \alpha| = \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha > 0$$

از طرفی:

$$\cot \alpha = -\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\frac{\cos \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha}} \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\frac{\cos \alpha}{|\sin \alpha|}$$

$$\Rightarrow |\sin \alpha| = -\sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha < 0$$

پس:

انتهای کمان α در ناحیه چهارم مثلثاتی $\Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha > 0 \\ \sin \alpha < 0 \end{cases}$

در نتیجه گزینه ۱ صحیح است.

گروه آموزشی ماز

سوالات کنکور: فصل ۴ یازدهم

۴- اگر $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ باشد، حاصل $\sqrt{1 + \tan^2 x} (2 \sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x)$ کدام است؟
 (۱) $\sin x$ (۲) $\cos x$ (۳) $-\sin x$ (۴) $-\cos x$

(متوسط - مفهومی - ۱۱۰۴) (کنکور داخل ۹۸)

پاسخ: گزینه ۴

نکته:

• $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ • $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

ابتدا عبارت داده شده را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{1 + \tan^2 x} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{|\cos x|} = \frac{1}{-\cos x}$$

$$2 \sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$$

حال عبارت‌های به دست آمده را در هم ضرب می‌کنیم: $\frac{1}{-\cos x} \cdot \cos^2 x = -\cos x$

توجه!

می‌دانیم که انتهای کمان x در ناحیه سوم است، پس: $|\cos x| = -\cos x$

گروه آموزشی ماز



۵- حاصل عبارت $\sin\left(-\frac{17\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{17\pi}{6}\right) + \tan\left(-\frac{19\pi}{4}\right)\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۳)

$-\frac{1}{2}$ (۲)

$-\frac{1}{4}$ (۱)

(آسان - محاسباتی - ۱۱۰۴) (کنکور داخل ۹۸)

پاسخ: گزینه ۳

نکته:

- $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
- $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$
- $\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$
- $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$
- $\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$
- $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$
- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$
- $\tan(2\pi - \alpha) = -\tan \alpha$
- $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$
- $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$
- $\cot(2\pi - \alpha) = -\cot \alpha$

ابتدا هر یک از نسبت‌ها را به صورت زیر ساده می‌کنیم: (توجه: $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$)

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{17\pi - \pi}{3}\right)\cos\left(\frac{17\pi - \pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{2\pi - \pi}{4}\right) \times \left(-\sin\left(\frac{17\pi - \pi}{6}\right)\right) &= \sin\left(6\pi - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right) - \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \times \left(-\cos\frac{\pi}{6}\right) - \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(1 \times \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

گروه آموزشی ماز

۶- اگر $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x\right)$ کدام است؟

$\cos x$ (۴)

$\cos^2 x$ (۳)

$-\cos x$ (۲)

$-\cos^2 x$ (۱)

(متوسط - مفهومی - ۱۱۰۴) (کنکور خارج ۹۸)

پاسخ: گزینه ۱

نکته:

- $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

ابتدا به کمک اتحادهای مثلثاتی عبارت داده شده را تا جای ممکن ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x\right) &= \frac{\tan x}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} \times \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{|\cos x|}} \times \frac{\cos^2 x}{\sin x} \\ \xrightarrow{\frac{\pi}{2} < x < \pi} &\frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{\cos^2 x}{\sin x} = -\sin x \times \frac{\cos^2 x}{\sin x} = -\cos^2 x \end{aligned}$$

توجه:

می‌دانیم که انتهای کمان x در ناحیه دوم است. پس: $|\cos x| = -\cos x$

گروه آموزشی ماز

۷- اگر $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ و انتهای کمان α در ربع سوم باشد، حاصل عبارت زیر کدام است؟

$\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right)\cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) - \tan\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$
۰/۴۸ (۴)

۰/۲۷ (۳)

-۰/۵۲ (۲)

-۱/۲۳ (۱)



(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۴) (کنکور خارج ۹۸)

پاسخ: گزینه ۳

نکته:

$$\begin{aligned} \bullet \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= \cos \alpha & \bullet \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha & \bullet 1 + \tan^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ \bullet \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\sin \alpha & \bullet \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 & \bullet \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) &= \cot \alpha \end{aligned}$$

ابتدا به کمک نسبت‌های مثلثاتی زوایای متمم و مکمل، تکلیف کمان‌ها را مشخص می‌کنیم:

$$\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right) \times \cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) - \tan\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) \times \cos\left(4\pi - \frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$= \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}_{\cos \alpha} \times \underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}_{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha} + \cot \alpha = \cos \alpha (-\sin \alpha) + \cot \alpha$$

حال به کمک $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ و با استفاده از رابطه $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ ، داریم: (توجه: α در ربع سوم)

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{25}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$-\sin \alpha \cos \alpha + \cot \alpha = -\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{3}{4} = \frac{12}{25} + \frac{3}{4} = \frac{47}{100}$$

در نهایت حاصل $-\sin \alpha \cos \alpha + \cot \alpha$ را به دست می‌آوریم:

گروه آموزشی ماز

۸- حاصل عبارت $\tan(300^\circ)\cos(210^\circ) + \tan(480^\circ)\sin(840^\circ)$ ، کدام است؟ (اعداد داده شده بر حسب درجه هستند).

- ۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

(آسان - محاسباتی - ۱۱۰۴) (کنکور داخل ۹۹)

پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{aligned} \bullet \tan(2\pi - \alpha) &= -\tan \alpha & \bullet \sin(2\pi + \alpha) &= \sin \alpha \\ \bullet \tan(2\pi + \alpha) &= \tan \alpha & \bullet \sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha \\ \bullet \cos(\pi + \alpha) &= -\cos \alpha & \bullet \tan(\pi - \alpha) &= -\tan \alpha \end{aligned}$$

$$\tan 300^\circ = \tan(360^\circ - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

ابتدا هر یک از نسبت‌های مثلثاتی داده شده را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 480^\circ = \tan(360^\circ + 120^\circ) = \tan 120^\circ = \tan(180^\circ - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sin 840^\circ = \sin(720^\circ + 120^\circ) = \sin(120^\circ) = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left(-\sqrt{3}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\sqrt{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

حال نسبت‌های مثلثاتی به دست آمده را در عبارت سؤال جای گذاری کرده و داریم:

گروه آموزشی ماز

۹- حاصل عبارت $\tan(285^\circ)\tan(-165^\circ) - \sin(1095^\circ)\cos(255^\circ)$ ، کدام است؟ (اعداد داده شده بر حسب درجه هستند).

- ۱) $\sin^2(15^\circ)$ ۲) $\cos^2(15^\circ)$ ۳) $-\sin^2(15^\circ)$ ۴) $-\cos^2(15^\circ)$



(آسان - محاسباتی - ۱۱۰۴) (کنکور خارج ۹۹)

پاسخ: گزینه ۴

- $\tan(270^\circ + \alpha) = -\cot \alpha$
- $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
- $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$
- $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
- $\sin(360^\circ + \alpha) = \sin \alpha$
- $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$
- $\cos(270^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$
- $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$

ابتدا هر یک از نسبت‌های مثلثاتی سؤال را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\tan 285^\circ = \tan 270^\circ + 15^\circ = -\cot 15^\circ$$

$$\tan -165^\circ = \tan -180^\circ + 15^\circ = \tan 15^\circ$$

$$\sin 1095^\circ = \sin 360^\circ \times 3 + 15^\circ = \sin 15^\circ$$

$$\cos 255^\circ = \cos 270^\circ - 15^\circ = -\sin 15^\circ$$

$$\Rightarrow \tan 285^\circ \tan -165^\circ - \sin 1095^\circ \cos 255^\circ$$

$$= -\cot 15^\circ \tan 15^\circ - \sin 15^\circ - \sin 15^\circ = -1 + \sin^2 15^\circ \xrightarrow{\sin^2 x + \cos^2 x = 1} -\cos^2 15^\circ$$

گروه آموزشی ماز

۱۰- فرض کنید زاویه α در ناحیه چهارم مثلثاتی و $\cos(\alpha) = \frac{2}{3}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) - \sin(\alpha - \pi)}{|\tan^2(\alpha) - 1|}$ ، کدام است؟

$$-\frac{4(2 + \sqrt{5})}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{4(2 - \sqrt{5})}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{4(-2 + \sqrt{5})}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{4(2 + \sqrt{5})}{3} \quad (۱)$$

(متوسط - ترکیبی / محاسباتی - ۱۱۰۴) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

پاسخ: گزینه ۳

نکته‌های مهم:

$$\bullet 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\bullet \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

روش اول:

ابتدا عبارت داده شده را تا حد امکان ساده می‌کنیم و از طرفی می‌دانیم که $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ است، پس:

$$\frac{\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) - \sin(\alpha - \pi)}{|\tan^2(\alpha) - 1|} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) + \sin(\pi - \alpha)}{|\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 - 1|} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{|\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 2|}$$

می‌دانیم که $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ است، بنابراین طبق اتحاد $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ می‌توانیم مقدار $\sin \alpha$ را نیز به دست آوریم، پس:

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - (\frac{2}{3})^2 \Rightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{5}{9}} \xrightarrow{\substack{\alpha \text{ در ناحیه چهارم} \\ \sin \alpha < 0}} \sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{|\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 2|} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{5}}{3}}{|\frac{1}{(\frac{2}{3})^2} - 2|} = \frac{\frac{2 - \sqrt{5}}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{4(2 - \sqrt{5})}{3}$$



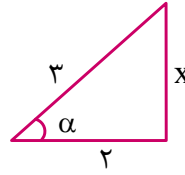
روش دوم:

می دانیم که نسبت کسینوس به صورت $\cos \alpha = \frac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{وتر}}$ تعریف می شود، بنابراین با داشتن $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ و مثلث قائم الزاویه زیر داریم:

$$x^2 + (2)^2 = (3)^2 \Rightarrow x = \sqrt{5}$$

$$|\sin \alpha| = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{وتر}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \xrightarrow{\text{در ناحیه چهارم}} \sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$|\tan \alpha| = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{ضلع مجاور } \alpha} = \frac{\sqrt{5}}{2} \xrightarrow{\text{در ناحیه چهارم}} \tan \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$



$$\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{|\tan^2 \alpha - 1|} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{5}}{3}}{\left| \left(-\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^2 - 1 \right|} = \frac{\frac{2-\sqrt{5}}{3}}{\left| \frac{5}{4} - 1 \right|} = \frac{\frac{2-\sqrt{5}}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{4(2-\sqrt{5})}{3}$$

گروه آموزشی ماز

- ۱۱- اگر $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ و $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1-m}{2+m}$ باشد، مجموعه مقادیر m کدام است؟
 (۱) $(-2, 1)$ (۲) $(-2, 1]$ (۳) $(-1, 2]$ (۴) $(-1, 2)$

(متوسط - ترکیبی / محاسباتی - ۱۴۰۲) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

نکته:

اگر $0 < x < \frac{\pi}{4}$ باشد، $\tan x$ بزرگتر از صفر است.

ابتدا با توجه به محدوده x ، محدوده $\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ را پیدا می کنیم:

$$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{4} - x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) > 0$$

$$\frac{1-m}{2+m} > 0 \Rightarrow -2 < m < 1$$

گروه آموزشی ماز

- ۱۲- اگر $-\frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12}$ و $\sin 2x = \frac{m-1}{4}$ باشد، مجموعه مقادیر m کدام است؟
 (۱) $(-1, 5)$ (۲) $(-1, 5]$ (۳) $(-1, 1)$ (۴) $(-1, 1]$

(آسان - محاسباتی - ۱۴۰۲) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$\sin 2x = \frac{m-1}{4}, \quad -\frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12} \xrightarrow{\times 2} -\frac{\pi}{6} < 2x < \frac{5\pi}{6} \Rightarrow -\frac{1}{2} < \sin 2x \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{2} < \frac{m-1}{4} \leq 1$$

$$\xrightarrow{\times 4} -2 < m-1 \leq 4 \Rightarrow -1 < m \leq 5$$

گروه آموزشی ماز

- ۱۳- اگر $\tan x + \cot x = -3$ و $3\pi < 4x < 4\pi$ باشد، حاصل $\frac{1}{\cos^3 x + \sin^3 x}$ کدام است؟
 (۱) $-0.5\sqrt{6}$ (۲) $0.75\sqrt{3}$ (۳) $-0.75\sqrt{3}$ (۴) $0.5\sqrt{6}$



(متوسط - محاسباتی - ۱۴۰۲) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

روابط مثلثاتی زوایای ۲ برابر کمان:

$$1) \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$2) \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

اتحادهای مثلثاتی زیر را به خاطر بسپارید:

$$1) \tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \times \sin x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

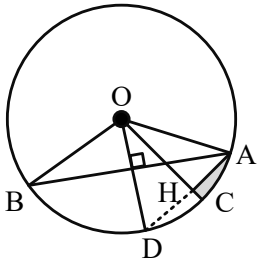
$$2) (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 + 2 \sin x \cos x = 1 + \sin 2x$$

$$\left. \begin{aligned} \tan x + \cot x &= \frac{1}{\sin x \cos x} = -3 \Rightarrow \sin x \cos x = -\frac{1}{3} \\ (\sin x + \cos x)^2 &= 1 + 2 \sin x \cos x = \frac{1}{3} \Rightarrow (\sin x) + (\cos x) = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \frac{2\pi}{4} < x < \pi \\ & \rightarrow (\sin x) + (\cos x) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2 - 2 \sin x \cos x} = \frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{2}{3}} = \frac{9}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

گروه آموزشی ماز

۱۴- مطابق شکل زیر، در دایره‌ای به مساحت π ، $\angle AOB = 120^\circ$ و OH عمود منصف AD است. اختلاف محیط مثلث AOH و محیط قسمت سایه زده شده کدام است؟



کدام است؟

(۱) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$

(۲) $\sqrt{2} - \frac{\pi}{6}$

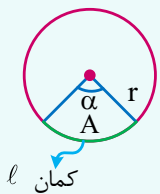
(۳) $\pi - \sqrt{3}$

(۴) $\pi - \sqrt{2}$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۴) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

مساحت و محیط قطاع دایره:



$$S_{\text{قطاع } A} = \frac{\alpha}{360^\circ} \times \pi r^2 \quad (\alpha \text{ بر حسب درجه است.})$$

$$l_{\text{کمان}} = \frac{\alpha}{360^\circ} \times 2\pi r$$

$$\left. \begin{aligned} r=1 \quad \angle AOH = 30^\circ \Rightarrow \begin{cases} AH = \frac{1}{2} \\ OH = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow P_{\triangle AOH} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ OA = 1 \end{cases} \\ \left. \begin{aligned} AC = \frac{\text{محیط}}{12} = \frac{2\pi \times 1}{12} = \frac{\pi}{6} \\ HC = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ AH = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P_{\text{AHC}} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P_{\triangle AOH} - P_{\text{AHC}} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$$

گروه آموزشی ماز



۱۵- در یک مستطیل، جذر مساحت، نصف طول قطر است. اگر B و C دو زاویه ایجادشده در یک طرف قطر باشد، مقدار تانژانت $(B-C)$ کدام است؟

(۴) $\sqrt{3}$

(۳) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(۲) $\frac{1}{3}$

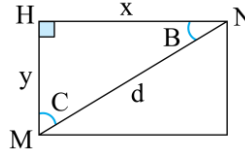
(۱) ۳

پاسخ: گزینه ۴ از مزمون وی ای پی

(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۲) (کنکور خارج ۱۴۰۳)

اگر طول و عرض مستطیل را به ترتیب برابر x و y فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \sqrt{S} = \frac{d}{2} \Rightarrow 2\sqrt{S} = d \Rightarrow 4S = d^2 \\ S = xy \end{cases}$$



پس $4xy = d^2$ است. از طرفی در مثلث قائم الزاویه MNH داریم:

$$\begin{cases} \sin \hat{C} = \frac{x}{d} \Rightarrow x = d \sin \hat{C} \\ \cos \hat{C} = \frac{y}{d} \Rightarrow y = d \cos \hat{C} \end{cases}$$

$$4xy = d^2 \Rightarrow 4(d \sin \hat{C})(d \cos \hat{C}) = d^2 \Rightarrow 4d^2 \sin \hat{C} \cos \hat{C} = d^2$$

$$\xrightarrow{d \neq 0} 4 \sin \hat{C} \cos \hat{C} = 1 \Rightarrow 2(2 \sin \hat{C} \cos \hat{C}) = 1 \Rightarrow 2 \sin 2\hat{C} = 1 \Rightarrow \sin 2\hat{C} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2\hat{C} = 30^\circ \Rightarrow \hat{C} = 15^\circ \xrightarrow{\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ} \hat{B} = 75^\circ$$

در نتیجه خواسته سؤال برابر است با:

$$\tan(\hat{B} - \hat{C}) = \tan(75^\circ - 15^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

گروه آموزشی ماز

۱۶- دوره تناوب $f(x) = \frac{1}{4} - 3 \sin \frac{\pi}{a} x$ برابر $\frac{\pi}{4}$ است. دوره تناوب تابع $-3f(2x)$ کدام است؟

(۴) $\frac{\pi}{4}$

(۳) π

(۲) $\frac{1}{4}$

(۱) ۱

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۲) (کنکور خارج ۱۴۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

دوره تناوب

اگر نمودار تابع $y = f(x)$ در فاصله‌هایی به طول T روی محور x ها شکل خود را مجدد تکرار کند تابع را متناوب با دوره تناوب T می‌گوییم. برخی توابع برکتی، توابع مثلثاتی و تابع ثابت از جمله معروفترین توابع متناوب هستند.

$$f(x+T) = f(x) \quad T \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{دوره تناوب است.}$$

۱) $f(x) = \sin(ax+b) \Rightarrow T_f = \frac{2\pi}{|a|}$

۳) $f(x) = ax - [ax] \Rightarrow T_f = \frac{1}{|a|}$

۲) $f(x) = \cos(ax+b) \Rightarrow T_f = \frac{2\pi}{|a|}$

۴) $f(x) = [ax] + [-ax] \Rightarrow T_f = \frac{1}{|a|}$

توجه کنید اگر T دوره تناوب تابع $y = f(x)$ باشد، T دوره تناوب تابع $y = af(x) + b$ نیز می‌باشد. (چرا؟)

می‌دانیم که دوره تناوب $f(x) = \frac{1}{4} - 3 \sin \frac{\pi}{a} x$ برابر $\frac{\pi}{4}$ است، پس:

$$T = \frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{a}\right|} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{4}} = 4 \Rightarrow |a| = \frac{\pi}{4}$$

حال تابع $-3f(2x)$ را تشکیل می‌دهیم و دوره تناوب آن را به دست می‌آوریم:

$$-3f(2x) = -3\left(\frac{1}{4} - 3 \sin \frac{2\pi}{a} x\right) = -\frac{3}{4} + 9 \sin \frac{2\pi}{a} x$$

$$T = \frac{2\pi}{\left|\frac{2\pi}{a}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{4}} = |a| = \frac{\pi}{4}$$



میانبر:

در به دست آوردن دوره تناوب تابع $y = -3f(2x)$ ، ضریب -3 بی تأثیر است، چرا که این ضریب فقط بُرد تابع را تحت تأثیر قرار می‌دهد و روی دامنه اثری ندارد. از طرفی ضریب 2 در پشت x ، طول تمامی نقاط را نصف می‌کند، لذا برای به دست آوردن دوره تناوب تابع $y = -3f(2x)$ ، فقط کافی است که دوره تناوب تابع $f(x)$ را نصف کنیم:

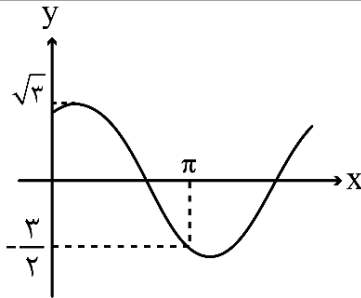
$$T_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$T_2 = \frac{T_1}{2} = \frac{\pi}{4}$$

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

گروه آموزشی ماز

سوالات کنکور: فصل ۲ دوازدهم



۱۷- شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \sin(x + \frac{\pi}{3})$ است. b کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (۲) $\frac{3}{2}$
- (۳) $\sqrt{3}$
- (۴) 2

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۲) (کنکور داخل ۹۸)

پاسخ: گزینه ۳

نکته:

در توابع به فرم $y = a \sin(bx + c) + d$ و $y = a \cos(bx + c) + d$ داریم:

- $T = \frac{2\pi}{|x \text{ ضریب} |} = \frac{2\pi}{|b|}$
- $y_{\max} = |a| + d$
- $y_{\min} = -|a| + d$

با توجه به نمودار: (۱) نمودار در شروع به صورت صعودی است، پس $b > 0$ است. (۲) بیشترین مقدار تابع برابر $\sqrt{3}$ است. (۳) نقطه $(\pi, -\frac{3}{2})$ در معادله صدق می‌کند.

$$(۲) y_{\max} = a + |b| \xrightarrow{b > 0} a + b = \sqrt{3}$$

$$(۳) f(\pi) = -\frac{3}{2} \Rightarrow a + b \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\frac{3}{2} \Rightarrow a - \frac{\sqrt{3}}{2}b = -\frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} a + b = \sqrt{3} \\ a - \frac{\sqrt{3}}{2}b = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow a = 0, b = \sqrt{3}$$

گروه آموزشی ماز

۱۸- مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $4 \sin x \sin(\frac{3\pi}{4} - x) = 1$ ، در بازه $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{5\pi}{2}$
- (۲) 3π
- (۳) 4π
- (۴) 5π

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۲) (کنکور داخل ۹۸)

پاسخ: گزینه ۴

نکته ۱:

$$\sin u = \sin v \Rightarrow \begin{cases} u = 2k\pi + v \\ u = 2k\pi + \pi - v \end{cases}$$

نکته ۲:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$



می‌دانیم که $\sin(\frac{3\pi}{4} - x) = -\cos x$ است، پس معادله موردنظر را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

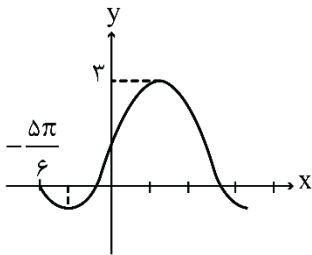
$$4 \sin x \cdot \sin(\frac{3\pi}{4} - x) = 4 \sin x \times (-\cos x) = 1 \Rightarrow -4 \sin x \cos x = 1 \Rightarrow 2 \sin x \cos x = \frac{-1}{2} \Rightarrow \sin 2x = \frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin 2x = \sin(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi - \frac{\pi}{12} \rightarrow x = \frac{11\pi}{12}, \frac{23\pi}{12} \\ x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \rightarrow x = \frac{7\pi}{12}, \frac{19\pi}{12} \end{cases}$$

مجموع: $\frac{7\pi + 11\pi + 19\pi + 23\pi}{12} = 5\pi$

مجموع جوابها در بازه $[0, 2\pi]$ برابر 5π است.

گروه آموزشی ماز



۱۹- شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \cos(\frac{\pi}{4} - x)$ است. مقدار تابع در $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟

- ۱/۵ (۱)
- ۲ (۲)
- ۲/۵ (۳)
- $1 + \sqrt{3}$ (۴)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۳۰۲) (کنکور خارج ۹۸)

پاسخ: گزینه ۲



نکته:

در توابع به فرم $y = a \cos(bx + c) + d$ و $y = a \sin(bx + c) + d$ داریم:

• دوره تناوب: $T = \frac{2\pi}{|x \text{ ضریب}|} = \frac{2\pi}{|b|}$

• $y_{\max} = |a| + d$

• $y_{\min} = -|a| + d$

$$y = a + b \cos(\frac{\pi}{4} - x) = a + b \sin x$$

می‌دانیم که $\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \sin \alpha$ است. پس ضابطه تابع را به صورت مقابل بازنویسی می‌کنیم:

از طرفی مشخص است که تابع از نقطه $(-\frac{5\pi}{6}, 0)$ عبور می‌کند. پس:

$$(-\frac{5\pi}{6}, 0) \xrightarrow{\text{جای گذاری در تابع}} a + b \sin(-\frac{5\pi}{6}) = 0 \Rightarrow a + b(-\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow a = \frac{b}{2}$$

بیشترین مقدار تابع برابر ۳ است. لذا: (توجه: تابع در شروع از صفر به سمت بالا رفته است، پس $b > 0$ است)

$$y_{\max} = a + |b| = 3 \xrightarrow{b > 0} a + b = 3 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{b}{2} \\ a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 2$$

$$f(x) = 1 + 2 \sin x \Rightarrow f(\frac{\pi}{6}) = 1 + 2 \sin \frac{\pi}{6} = 1 + 2(\frac{1}{2}) = 2$$

حال با $a = 1$ و $b = 2$ ضابطه تابع را تشکیل داده و $f(\frac{\pi}{6})$ را به دست می‌آوریم:

گروه آموزشی ماز

۲۰- جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 3x + \cos x = 0$ ، با شرط $\cos x \neq 0$ ، کدام است؟

$k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۴)

$k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۳)

$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (۲)

$\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$ (۱)

(متوسط - مفهومی - ۱۳۰۲) (کنکور خارج ۹۸)

پاسخ: گزینه ۲



نکته:

$$\cos u = \cos v \Rightarrow u = 2k\pi \pm v$$



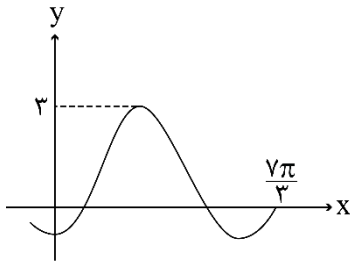
ابتدا سعی می کنیم که دو طرف تساوی را هم جنس و هم علامت کنیم:

$$\cos 3x = -\cos x \Rightarrow \cos 3x = \cos(\pi - x) \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm (\pi - x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \pi - x \\ 3x = 2k\pi - \pi + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \checkmark \\ x = k\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

توجه شود که جواب $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$ مقدار $\cos x$ را صفر می کند ولی با توجه به شرط سؤال $\cos x \neq 0$ است، پس این جواب قبول نیست.

گروه آموزشی ماز



۲۱- شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = a + b \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$ است. مقدار b کدام است؟

- (۱) ۲
- (۲) ۱
- (۳) -۱
- (۴) -۲

(متوسط - مفهومی/ محاسباتی - ۱۴۰۲) (کنکور داخل ۹۹)

پاسخ: گزینه ۴

در توابع به فرم $y = a \sin(bx + c) + d$ و $y = a \cos(bx + c) + d$ داریم:

- $y_{\max} = |a| + d$
- $y_{\min} = -|a| + d$
- دوره تناوب: $T = \frac{2\pi}{|b|}$

$$y = a + b \cos x$$

می دانیم که $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$ است، بنابراین ضابطه تابع را به صورت مقابل بازنویسی می کنیم:

از طرفی با توجه به نمودار تابع، بیشترین مقدار تابع برابر ۳ است و نمودار تابع از نقطه $\left(\frac{7\pi}{3}, 0\right)$ عبور می کند.

$$y_{\max} = 3 \Rightarrow a + |b| = 3 \xrightarrow{b < 0} a - b = 3 \quad (1)$$

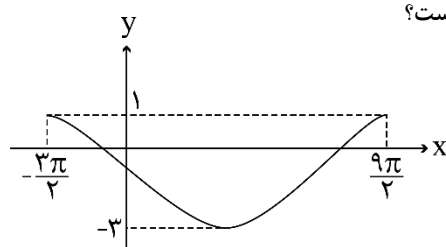


توجه: چون نمودار تابع \cos نسبت به محور x ها قرینه شده است، بنابراین $b < 0$ است.

$$f\left(\frac{7\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow a + b \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow a + b \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow a + \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} a - b = 3 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \xrightarrow{+} 3a = 3 \Rightarrow a = 1 \xrightarrow{a - b = 3} b = -2$$

گروه آموزشی ماز



۲۲- شکل زیر، نمودار تابع $y = a \sin(bx) + c$ را در یک بازه تناوب، نشان می دهد. نسبت $\frac{a}{b}$ ، کدام است؟

- (۱) -۲
- (۲) -۳
- (۳) -۴
- (۴) -۶

(متوسط - مفهومی/ محاسباتی - ۱۴۰۲) (کنکور داخل ۹۹)

پاسخ: گزینه ۴

چون نمودار تابع \sin نسبت به محور x ها قرینه شده است، در نتیجه $ab < 0$ است. از طرف دیگر، با توجه به نمودار داده شده، داریم:

$$\begin{cases} y_{\max} = 1 \Rightarrow |a| + c = 1 \\ y_{\min} = -3 \Rightarrow -|a| + c = -3 \end{cases} \xrightarrow{+} 2c = -2 \Rightarrow c = -1 \xrightarrow{|a| + c = 1} |a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2$$



$$T = \frac{9\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = 6\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 6\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{3}$$

از طرفی نمودار تابع در یک دوره تناوب نشان داده شده است، پس:

$$\frac{a}{b} = \frac{\pm 2}{\pm \frac{1}{3}} = -6$$

چون $ab < 0$ است، پس:

گروه آموزشی ماز

۲۳- جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ، با شرط $x \neq k\pi$ ، که در آن k یک عدد صحیح است، کدام است؟

$$\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \quad (۴)$$

$$\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \quad (۳)$$

$$\frac{2k\pi}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{k\pi}{3} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴ از مون وی ای پی

(متوسط - مفهومی - ۱۲۰۲) (کنکور داخل ۹۹)

$$\sin u = \sin v \Rightarrow \begin{cases} u = 2k\pi + v \\ u = 2k\pi + \pi - v \end{cases}$$

با استفاده از رابطه $\cos \theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ ، نسبت‌های دو طرف تساوی داده شده را هم‌نام می‌کنیم:

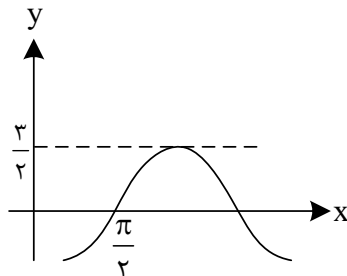
$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) \Rightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \left(\frac{\pi}{4} - x\right) \Rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{4} - x\right) \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

چون $x \neq k\pi$ است، بنابراین گزینه «۴» صحیح است.

گروه آموزشی ماز

۲۴- شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = a + b \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ است. مقدار a ، کدام است؟



$$-1 \quad (۱)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$1 \quad (۴)$$

پاسخ: گزینه ۳

(متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۲) (کنکور خارج ۹۹)

در توابع به فرم $y = a \cos(bx + c) + d$ و $y = a \sin(bx + c) + d$ داریم:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \quad \bullet y_{\max} = |a| + d \quad \bullet y_{\min} = -|a| + d$$

با توجه به نمودار: (۱) بیشترین مقدار تابع برابر $\frac{3}{2}$ است. (۲) نمودار از نقطه $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\right)$ عبور می‌کند.

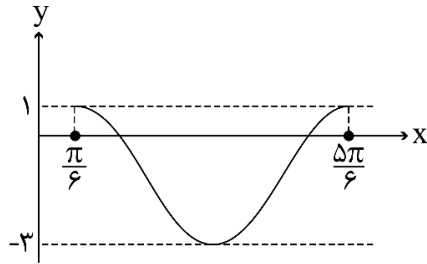
$$۱) y_{\max} = |b| + a = \frac{3}{2} \xrightarrow{b < 0} a - b = \frac{3}{2}$$

$$۲) f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a + b \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = a + b \cos \frac{\pi}{3} = a + \frac{b}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} a - b = \frac{3}{2} \\ a + \frac{b}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = -1$$

توجه!

چون شیب تابع در نقطه $x = 0$ منفی است، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که b منفی است.

گروه آموزشی ماز



۲۵- شکل زیر، نمودار تابع $y = a \sin(bx) + c$ ، در یک بازه تناوب است. مقادیر b و c ، کدام اند؟

(۱) $b = 3, c = -1$

(۲) $b = 3, c = -2$

(۳) $b = \frac{3}{2}, c = -2$

(۴) $b = \frac{3}{2}, c = -1$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۴۰۲) (کنکور خارج ۹۹)

پاسخ: گزینه ۱

به نگاه به نکات سؤال قبل بنداز!

$$T = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

با توجه به نمودار داده شده، دوره تناوب برابر است با:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \xrightarrow{T = \frac{2\pi}{3}} \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 3 \Rightarrow b = \pm 3$$

از طرفی با توجه به ضابطه تابع، دوره تناوب برابر است با:

از طرفی با توجه به نمودار، بیشترین مقدار تابع برابر ۱ و کمترین مقدار آن برابر -۳ است، پس:

$$\begin{cases} |a| + c = 1 \\ -|a| + c = -3 \end{cases} \Rightarrow c = -1$$

بنابراین با توجه به گزینه‌ها، گزینه ۱ درست است.

گروه آموزشی ماز

۲۶- تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی $4 \sin(3x) \cos(3x) = 1$ ، در بازه $[0, \frac{\pi}{3}]$ ، کدام است؟

(۴) ۵

(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) ۲

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۴۰۲) (کنکور خارج ۹۹)

پاسخ: گزینه ۳

$$\sin u = \sin v \Rightarrow \begin{cases} u = 2k\pi + v \\ u = 2k\pi + \pi - v \end{cases}$$

روش اول:

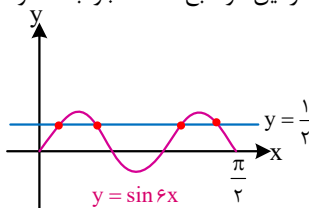
$$4 \sin 3x \cdot \cos 3x = 1 \Rightarrow 2 \sin 6x = 1 \Rightarrow \sin 6x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 6x = \sin \frac{\pi}{6}$$

ابتدا به کمک رابطه $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$ داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} 6x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{36} \\ 6x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{5\pi}{36} \end{cases} \xrightarrow{[0, \frac{\pi}{3}]} \left\{ \frac{\pi}{36}, \frac{5\pi}{36}, \frac{13\pi}{36}, \frac{17\pi}{36} \right\} \Rightarrow \text{جواب ۴}$$

روش دوم:

چون تعداد جواب‌ها را خواسته، بنابراین نمودار توابع $y_1 = \sin 6x$ و $y_2 = \frac{1}{2}$ را رسم می‌کنیم، تعداد نقاط برخورد نمودار این دو تابع، تعداد جواب‌ها خواهد بود.



گروه آموزشی ماز

۲۷- اگر $f(x) = 16 \cos^2(3x) \cos^2(6x) \cos^2(12x) \cos^2(24x)$ باشد، مقدار $f(\frac{\pi}{36})$ ، کدام است؟

(۴) $\frac{6 + 3\sqrt{3}}{16}$

(۳) $\frac{6 + \sqrt{3}}{16}$

(۲) $\frac{6 - \sqrt{3}}{16}$

(۱) $\frac{6 - 3\sqrt{3}}{16}$



(سخت - محاسباتی - ۱۴۰۲) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

پاسخ: گزینه ۴

نکته ۱:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

نکته ۲:

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \\ \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \end{cases}$$

روش اول:

عبارت داده شده را در $\sin^2 3x$ ضرب و بر آن تقسیم می‌کنیم و سپس با استفاده از اتحاد $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ داریم:

$$\frac{\frac{1}{4} \sin^2 6x}{16 \sin^2 3x \cos^2 3x \cos^2 6x \cos^2 12x \cos^2 24x} = \frac{\frac{1}{4} \sin^2 12x}{4 \sin^2 6x \cos^2 6x \cos^2 12x \cos^2 24x} = \frac{\frac{1}{4} \sin^2 24x}{\sin^2 3x}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} \sin^2 48x}{4 \sin^2 3x \cos^2 24x} = \frac{\sin^2 48x}{16 \sin^2 3x}$$

حال در مخرج کسر فوق از اتحاد $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ استفاده کرده و داریم:

$$\frac{\sin^2 48x}{16 \frac{1 - \cos 96x}{2}} = \frac{\sin^2 48x}{8(1 - \cos 96x)} \xrightarrow{x = \frac{\pi}{36}} \frac{\sin^2 \left(\frac{48\pi}{36}\right)}{8(1 - \cos\left(\frac{6\pi}{36}\right))} = \frac{\sin^2\left(\frac{4\pi}{3}\right)}{8(1 - \cos\frac{\pi}{6})} = \frac{\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2}{8\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{\frac{3}{4}}{4(2 - \sqrt{3})} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{6 + 3\sqrt{3}}{16}$$

روش دوم:

از همان ابتدای کار به جای x ها، $\frac{\pi}{36}$ را جای‌گذاری کرده و داریم:

$$f\left(\frac{\pi}{36}\right) = 16 \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

حال برای عامل $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$ از اتحاد $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ استفاده می‌کنیم:

$$f\left(\frac{\pi}{36}\right) = 16 \left(\frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2}\right) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 16 \left(\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}\right) \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{36}\right) = 16 \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{4}\right) \times \frac{3}{64} = \frac{6 + 3\sqrt{3}}{16}$$

گروه آموزشی ماز

۲۸- اگر زاویه α در ناحیه سوم مثلثاتی و $\tan(\alpha) = \frac{3}{4}$ باشد، مقدار $\frac{\cos(2\alpha - \frac{\pi}{2}) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot(2\alpha)}$ ، کدام است؟

$-\frac{1056}{175}$ (۴)

$\frac{96}{175}$ (۳)

$\frac{1056}{175}$ (۲)

$-\frac{96}{175}$ (۱)

(سخت - ترکیبی / محاسباتی - ۱۴۰۲) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

پاسخ: گزینه ۲

نکته ۱:

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

نکته ۲:

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

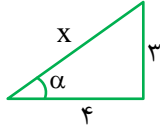


ابتدا عبارت داده شده را به صورت زیر و با کمک روابط بین نسبت‌های مثلثاتی ساده می‌کنیم:

$$\frac{\cos(2\alpha - \frac{\pi}{2}) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot(2\alpha)} = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - 2\alpha) + \cos(\pi + \alpha)}{\cot 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha - \cos \alpha}{\cot 2\alpha} \quad (*)$$

می‌دانیم که $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ است، بنابراین با کمک مثلث قائم‌الزاویه زیر می‌توانیم سایر نسبت‌های مثلثاتی را نیز به دست آوریم:

$$x^2 = (3)^2 + (4)^2 \rightarrow x = 5$$



$$\begin{aligned} |\sin \alpha| &= \frac{3}{5} \xrightarrow{\text{در ناحیه سوم}} \sin \alpha = -\frac{3}{5} \\ |\cos \alpha| &= \frac{4}{5} \xrightarrow{\text{در ناحیه سوم}} \cos \alpha = -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

حال با توجه به عبارت ساده شده صورت سؤال (رابطه*) باید نسبت‌های $\sin 2\alpha$ و $\cot 2\alpha$ را نیز به دست آوریم:

$$\left. \begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \left(-\frac{3}{5}\right) \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25} \\ \cos 2\alpha &= 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = \frac{32}{25} - 1 = \frac{7}{25} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \cot 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\frac{7}{25}}{\frac{24}{25}} = \frac{7}{24}$$

حال نسبت‌های مثلثاتی به دست آمده را در رابطه (*) قرار داده و داریم:

$$\frac{\sin 2\alpha - \cos \alpha}{\cot 2\alpha} = \frac{\frac{24}{25} - \left(-\frac{4}{5}\right)}{\frac{7}{24}} = \frac{\frac{24}{25} + \frac{4}{5}}{\frac{7}{24}} = \frac{\frac{24+20}{25}}{\frac{7}{24}} = \frac{\frac{44}{25}}{\frac{7}{24}} = \frac{44}{25} \cdot \frac{24}{7} = \frac{1056}{175}$$

گروه آموزشی ماز

۲۹- تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی $\cos^2(x) - \sin^2(x) \cos(3x) = 1$ در فاصله $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۴۰۲) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا با استفاده از اتحاد $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ ، عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\cos^2 x - \sin^2 x \cos 3x = 1 \Rightarrow (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x \cos 3x = 1 \Rightarrow -\sin^2 x - \sin^2 x \cos 3x = 0$$

$$\Rightarrow -\sin^2 x (1 + \cos 3x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 0 \rightarrow x = k\pi \\ \cos 3x + 1 = 0 \rightarrow \cos 3x = -1 = \cos \pi \Rightarrow 3x = 2k\pi + \pi \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

k	۰	۱	۲
$k\pi$	۰	π	2π
$\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{5\pi}{3}$

$$x = \left\{ 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi \right\}$$

در نتیجه تعداد جواب‌های معادله مورد نظر در بازه $[0, 2\pi]$ برابر ۵ تا است.

گروه آموزشی ماز

۳۰- اگر $f(x) = 32 \cos^2(x) \cos^2(2x) \cos^2(4x) \cos^2(8x) \cos^2(16x)$ باشد، مقدار $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ، کدام است؟

$\frac{6 - \sqrt{27}}{32}$ (۴)

$\frac{6 - \sqrt{27}}{16}$ (۳)

$\frac{6 + \sqrt{27}}{16}$ (۲)

$\frac{6 + \sqrt{27}}{32}$ (۱)

(سخت - ترکیبی / محاسباتی - ۱۴۰۲) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

پاسخ: گزینه ۱

نکته‌های مهم

$$\bullet \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad \bullet \begin{cases} \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \\ \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha \end{cases}$$



$$f(x) = 32 \cos^2(x) \cos^2(2x) \cos^2(4x) \cos^2(8x) \cos^2(16x)$$

ابتدا به جای تمامی x ها، $\frac{\pi}{12}$ را جای گذاری می کنیم:

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 32 \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cos^2\left(\frac{4\pi}{3}\right) \quad (*)$$

حال حاصل هر یک از نسبت های مثلثاتی را به دست می آوریم:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \rightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos^2\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}$$

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 32 \times \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{32} = \frac{6 + \sqrt{27}}{32}$$

حال مقدارهای به دست آمده را در رابطه (*) قرار می دهیم:

گروه آموزشی ماز

۳۱- تعداد جواب های معادله مثلثاتی $5 \sin^2(x) + 2 \cos(3x) = -2$ در فاصله $[-\pi, \pi]$ ، کدام است؟

۷ (۴)

۵ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(سخت - محاسباتی - ۱۴۰۲) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

پاسخ: گزینه ۲ از م و ی ای پی

نکته های مهم:

• $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$

• $\sin u = 0 \Rightarrow u = k\pi$

• $\cos u = 0 \Rightarrow u = k\pi + \frac{\pi}{2}$

ابتدا معادله داده شده را به کمک رابطه $\cos \alpha = 2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1$ ساده می کنیم:

$$5 \sin^2(x) + 2 \cos(3x) = -2 \Rightarrow 5 \sin^2(x) + 2(2 \cos^2\left(\frac{3x}{2}\right) - 1) = -2 \Rightarrow 5 \sin^2(x) + 4 \cos^2\left(\frac{3x}{2}\right) = 0$$

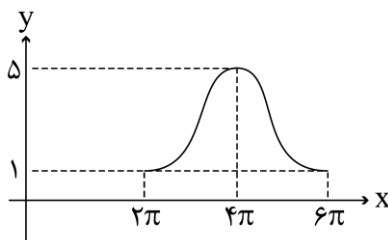
با توجه به رابطه بالا می توان گفت که مجموع دو عبارت نامنفی برابر صفر شده است و این حالت زمانی رخ می دهد که هر دو عبارت برابر صفر باشند، پس:

$$\begin{cases} 5 \sin^2(x) = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \xrightarrow{x \in [-\pi, \pi]} x = -\pi, 0, \pi \\ 4 \cos^2\left(\frac{3x}{2}\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{3x}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{3x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi + \pi}{3} \xrightarrow{x \in [-\pi, \pi]} x = -\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \pi \end{cases}$$

جواب مورد نظر از اشتراک دو مجموعه جواب بالا حاصل می شود که اشتراک آن ها جواب های π و $-\pi$ است، بنابراین معادله داده شده در بازه $[-\pi, \pi]$ دو جواب خواهد داشت.

گروه آموزشی ماز

۳۲- شکل زیر، نمودار تابع $y = c + a \cos bx$ را در یک دوره تناوب، نشان می دهد. مقدار c کدام است؟



۵ (۱)

۴ (۲)

۳ (۳)

۱ (۴)

(ساده - مفهومی - ۱۴۰۲) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

• $y_{\max} = |a| + c$

• $y_{\min} = -|a| + c$

• $c = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2}$

در تابع $y = a \cos bx + c$ داریم:



روش اول:

$$\begin{cases} \max : |a| + c = 5 \\ \min : -|a| + c = 1 \end{cases} \xrightarrow{+} 2c = 6 \Rightarrow c = 3$$

روش دوم:

$$c = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} = \frac{5 + 1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

گروه آموزشی ماز

۳۳- تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی $8 \cos x - \tan^2 x = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

۲ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۵ (۱)

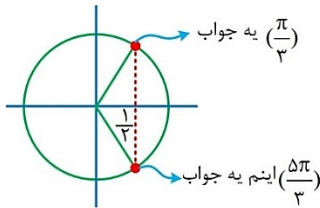
(متوسط - محاسباتی - ۱۳۰۲) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$1) \quad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

(۲) معادله $0 < a < 1$; $\cos x = a$ در بازه $[0, 2\pi]$ (یک دور دایره مثلثاتی)، دو جواب دارد.

$$8 \cos x - \tan^2 x = 1 \Rightarrow 8 \cos x = \underbrace{1 + \tan^2 x}_{\cos^2 x} \Rightarrow 8 \cos x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^3 x = \frac{1}{8} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$



چون تعداد جواب‌ها در بازه $[0, 2\pi]$ مدنظر است:

گروه آموزشی ماز

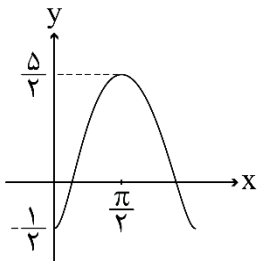
۳۴- شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = c + a \cos bx$ را نشان می‌دهد. مقدار ac کدام است؟

-۵ (۱)

-۳ (۲)

$-\frac{5}{2}$ (۳)

$-\frac{3}{2}$ (۴)



(آسان - محاسباتی - ۱۳۰۲) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

نکته:

- در تابع $y = a \cos bx + c$

$$y_{\max} = |a| + c$$

$$y_{\min} = -|a| + c$$

- دوره تناوب $y = a \cos bx + c$ به صورت $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است.

در نمودار داده شده، $y_{\max} = \frac{5}{2}$ و $y_{\min} = -\frac{1}{2}$ می‌باشد:

$$\begin{cases} \frac{5}{2} = |a| + c \\ -\frac{1}{2} = -|a| + c \end{cases} \Rightarrow c = 1, |a| = 1/5 \xrightarrow{\text{نمودار در } X = 0^+ \text{ صعودی است}} a = -1/5$$

$$ac = -1/5$$



۳۵- تعداد جواب‌های معادله $\sin(x + \frac{\pi}{6})\cos(x - \frac{\pi}{3}) = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(متوسط - مفهومی - ۱۴۰۲) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

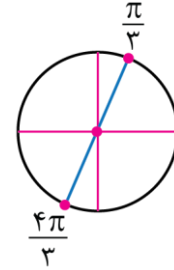
پاسخ: گزینه ۲

۱) اگر $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \sin \alpha = \cos \beta$

۲) $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$

۳) $\sin^2 x = \sin^2 \alpha \Rightarrow x = k\pi \pm \alpha$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1 \xrightarrow{\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}} \sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Rightarrow x + \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2}$$



$$\Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} k=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \\ k=1 \Rightarrow x = \pi + \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

بنابراین معادله ۲ جواب دارد.

گروه آموزشی ماز

۳۶- خطوط $ax - y = 3$ و $3y + x = -9$ یکدیگر را در نقطه A و خط $y - x = 0$ را به ترتیب در نقاط B و C قطع می‌کنند. اگر مرکز دایره‌ای که از این سه نقطه می‌گذرد، بر نیمساز ناحیه اول و سوم واقع باشد، در مثلث ABC، مقدار $\tan(B - C)$ کدام است؟

۲ (۴)

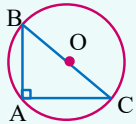
۱ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)

(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۱) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۲



نکته:

- دایره‌ای که از ۳ رأس مثلث می‌گذرد، دایره محیطی مثلث نامیده می‌شود.
- اگر مرکز دایره محیطی بر وسط یکی از اضلاع منطبق باشد، آن گاه آن مثلث، قائم‌الزاویه بوده و آن ضلع، وتر است.

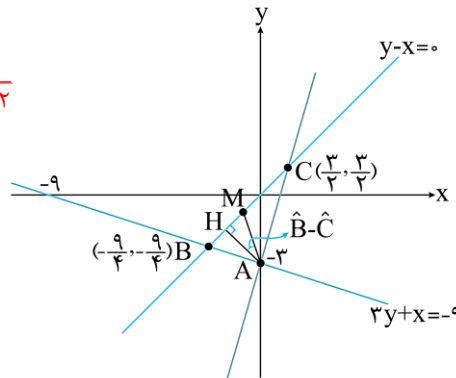
$$m_{AB} = -\frac{1}{3} \Rightarrow m_{AC} = 3 \Rightarrow a = 3$$

مرکز دایره محیطی بر وسط یکی از اضلاع واقع است. (ضلع BC)، بنابراین زاویه A قائمه است.

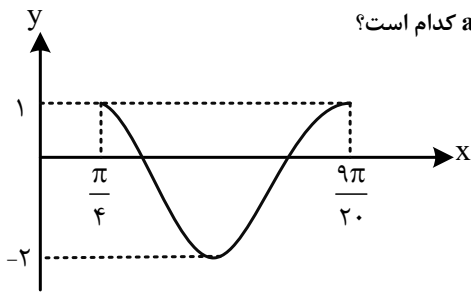
B - C زاویه بین میانه و ارتفاع وارد بر وتر است.

$$AH = \frac{|0+3|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \quad AM = \frac{BC}{2} = \frac{15}{8}\sqrt{2}$$

$$\cos(B - C) = \frac{AH}{AM} = \frac{4}{5} \Rightarrow \tan(B - C) = \frac{3}{4}$$



گروه آموزشی ماز



۳۷- شکل زیر، نمودار تابع $y = a \cos^2\left(bx - \frac{\pi}{4}\right) + c$ در یک بازه تناوب را نشان می‌دهد. مقدار ab کدام است؟

- (۱) ۱۵
- (۲) -۱۵
- (۳) ۷/۵
- (۴) -۷/۵

(متوسط - محاسباتی - ۱۳۰۲) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

دوره تناوب توابع مثلثاتی:

۱) $a \sin(bx + c) + d$, $a \cos(bx + c) + d$, $[a \sin(bx + c) + d]^m$, $[a \cos(bx + c) + d]^m$

عددی فرد: m

$$T = \frac{2\pi}{|b|}$$

۲) $[a \sin(bx + c) + d]^m$, $[a \cos(bx + c) + d]^m$, $a \tan(bx + c) + d$, $a \cot(bx + c) + d$

عددی زوج: m

$$T = \frac{\pi}{|b|}$$

روش اول:

$$T = \frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{5} \Rightarrow |b| = 5$$

$$y = \frac{a}{2} \left(\cos\left(2bx - \frac{\pi}{2}\right) + 1 \right) + c = \frac{a}{2} \sin 2bx + \frac{a}{2} + c$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow |ab| = 15 \xrightarrow{ab > 0} ab = +15 \\ \left| \frac{a}{2} \right| = \frac{3}{2} \Rightarrow |a| = 3 \end{array} \right\}$$

با امتحان a مثبت و b منفی به تناقض می‌رسیم. البته با محاسبه مشتق تابع به دست آمده در صفر نیز، به این نتیجه می‌رسیم که a و b هم علامت هستند.

روش دوم:

$$T = \frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{5} \Rightarrow |b| = 5$$

$$0 \leq \cos^2\left(bx - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

$$\begin{array}{l} +a \\ +c \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \min = c = -2 \\ \max = a + c = 1 \Rightarrow a = 3 \end{array} \right.$$

$$ab = 5 \times 3 = +15$$

پس:

گروه آموزشی ماز

۳۸- اگر اختلاف جواب‌های معادله $\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi+4x}{2}\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi+8x}{2}\right)} = 0$ در بازه $[0, \pi]$ برابر α باشد، مقدار $\tan(2\alpha)$ کدام است؟

$-\sqrt{3}$ (۴)

$\sqrt{3}$ (۳)

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۱)



(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۴۰۲) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

معادلات مثلثاتی:

- ۱) $\sin \alpha = \sin \beta$
 $\alpha = 2k\pi + \beta$, $\alpha = 2k\pi + \pi - \beta$
 ۲) $\cos \alpha = \cos \beta$
 $\alpha = 2k\pi \pm \beta$
 ۳) $\tan \alpha = \tan \beta$ یا $\cot \alpha = \cot \beta$
 $\alpha = k\pi + \beta$

نسبت‌های مثلثاتی ۲ زاویه با اختلاف $\frac{\pi}{2}$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right) \Rightarrow \cos 2x = \sin 4x$$

$$\Rightarrow \cos 2x(2 \sin 2x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \text{ هر دو غ ق ق} \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12} \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$$

$$\tan 2\alpha = \tan \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

گروه آموزشی ماز

۳۹- معادله مثلثاتی $2 \cos^2 x = \sin x + 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

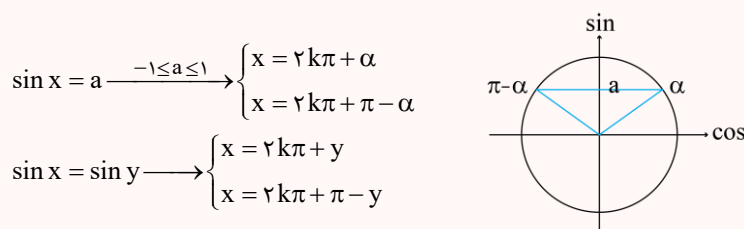
(متوسط - محاسباتی - ۱۴۰۲) (کنکور خارج ۱۴۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

معادله مثلثاتی

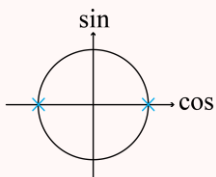
معادله‌ای که مجهول آن (x) جلوی یک نسبت مثلثاتی قرار بگیرد. مانند معادله $\sin x = \frac{1}{2}$. با حل این معادله به دنبال زوایایی هستیم که سینوس آن‌ها برابر $\frac{1}{2}$ است.

معادله مثلثاتی $\sin x$

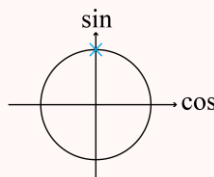


حالت‌های خاص

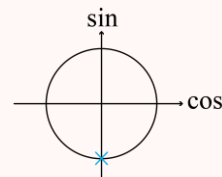
۱) $\sin A = 0 \Rightarrow A = k\pi$



۲) $\sin A = 1 \Rightarrow A = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$



۳) $\sin A = -1 \Rightarrow A = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

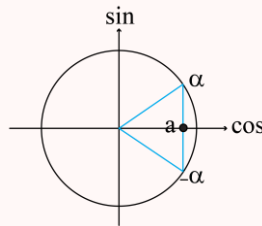




معادله مثلثاتی $\cos x$

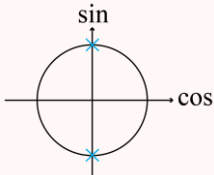
$$\cos x = a \xrightarrow{-1 \leq a \leq 1} \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi - \alpha \end{cases}$$

$$\cos x = \cos y \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + y \\ x = 2k\pi - y \end{cases}$$

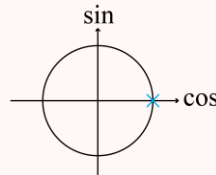


حالت‌های خاص

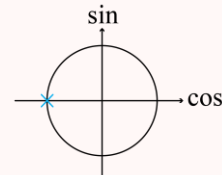
۱) $\cos A = 0 \Rightarrow A = k\pi + \frac{\pi}{2}$



۲) $\cos A = 1 \Rightarrow A = 2k\pi$



۳) $\cos A = -1 \Rightarrow A = 2k\pi + \pi$

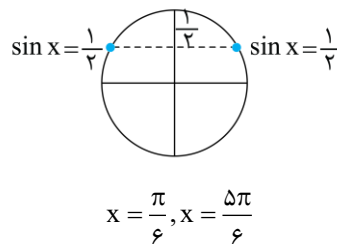
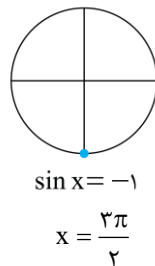


می‌دانیم که $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ است، پس:

$$2 \cos^2 x = \sin x + 1 \Rightarrow 2(1 - \sin^2 x) = \sin x + 1$$

$$2 - 2 \sin^2 x = \sin x + 1 \Rightarrow 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

چون تعداد جواب‌ها در بازه $[0, 2\pi]$ مدنظر است، پس:



بنابراین معادله داده شده در بازه $[0, 2\pi]$ ، سه جواب دارد و گزینه ۲ صحیح است.

◆ گروه آموزشی ماز ◆